波動方程式の外部問題の解の減衰評価について(偏微分方程式に対する境界値問題)

久保, 英夫

数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 82-105

波動方程式の外部問題の解の減衰評価について

大阪大学大学院理学研究科　久保 英夫 (Hideo Kubo)
Department of Mathematics, Osaka University

1 はじめに

$\mathcal{O}$ を滑らかな境界を持つ $\mathbf{R}^3$ の有界領域とし，$\Omega := \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ とする．次の混合問題を考える:

$$\Box u \equiv (\partial_t^2 - \Delta)u = f \qquad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

$\vec{u}_0 := (u_0, u_1)$ とおき，この問題の $f \equiv 0$ のときの古典解を $K[\vec{u}_0](t,x)$, $\vec{u}_0 \equiv 0$ のときの古典解を $L[f](t,x)$ と表すことにする．また，上の混合問題に対応する次の初期値問題も考える:

$$\Box v = g, \qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}^3, \tag{1.4}$$

$$v(0,x) = v_0, \quad (\partial_t v)(0,x) = v_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^3. \tag{1.5}$$

混合問題の時と同様に $\vec{v}_0 := (v_0, v_1)$ とおき，この問題の $g \equiv 0$ のときの古典解を $K_0[\vec{v}_0](t,x)$, $\vec{v}_0 \equiv 0$ のときの古典解を $L_0[g](t,x)$ と表すことにする．

混合問題 (1.1)–(1.3) に対する時間減衰評価としては，[17] により L^p–L^q 評価が所謂 “cut–off method” により導かれたのが最初と思われる．さらに，同じ論文において，非線型波動方程式の大域解の存在について議論がなされ，空間次元が三次元の場合には，非線型項のオーダーが三次以上ならばある意味で小さな初期値に対して時間大域解が存在する事が示されている．その後，非線型項のオーダーが二次の場合について多くの研究がなされた (例えば，[3], [9, 10], [14], [15], [16] など). 特に，[15] では，障害物 $\mathcal{O}$ が局所エネルギー減衰評価を許す場合に，初期値問題について [18] で得られている結果に対応する主張を導いている．但し，初期値問題のときと較べると，その証明はそれ程単純ではないように思われる．

そこで，このノートでは，初期値問題における非線型波動方程式を考えるとき有効であった解の微分に関する減衰評価 (3.14) を混合問題の場合に拡張することを考える．初

期値問題において，(3.14) のような評価式が効果的に用いられた例としては，[1], [4, 5], [6, 7], [8], [12], [13], [18] などが挙げられる．具体的には，[17] の方針に従い，初期値問題の解の一様減衰評価 (Lemma 3.3, Corollary 3.4) と混合問題の解の局所エネルギー減衰評価 (Lemma 3.1) を "cut–off method" によって組み合わせることで，混合問題の解の一様減衰評価 (Propositions 4.2 and 4.3) を導く．これらの減衰評価は混合問題における非線型摂動への応用にも有効であると考えれれる．一例として，(4.17) をもとに，"Almost global existence" と呼ばれる結果を 5 節で証明する．その際，局所エネルギー減衰評価 (Lemma 3.1) の一般化にあたる Lemma 4.4 を用いることが必要となる．

一般性を失うことなく，$0 \in \mathcal{O}$ 及び $\overline{\mathcal{O}} \subset B_{1/2}(0)$ と仮定して良いので，以下ではこれらを仮定する．但し，$B_r(x)$ は半径 r, 中心 x の開球を表すものとする．

2 解の表現公式

まず，混合問題 (1.1)–(1.3) に対する両立条件を次のように定める．

Definition. m を自然数とする．

$$\vec{u}_0 \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega), \quad f(t) \in \bigcap_{j=0}^{m-1} C^j([0,T)\colon H^{m-1-j}(\Omega)) \tag{2.1}$$

に対して

$$u_j(x) \equiv \Delta u_{j-2}(x) + (\partial_t^{j-2} f)(0,x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ 2 \le j \le m-1 \tag{2.2}$$

と定める．このとき, $0 \le j \le m-1$ なる全ての j に対して

$$u_j = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{2.3}$$

ならば，$\vec{u}_0, f$ は $(m-1)$ 次の両立条件を満たすと言う．なお，任意の自然数 m に対して，$\vec{u}_0, f$ が $(m-1)$ 次の両立条件を満たすとき，$\vec{u}_0, f$ は無限次の両立条件を満たすと言うことにする．

良く知られているように，(2.1) および $(m-1)$ 次の両立条件を満たす $\vec{u}_0, f$ に対して，混合問題 (1.1)–(1.3) は

$$u(t) \in \bigcap_{j=0}^{m} C^j([0,T)\colon H^{m-j}(\Omega))$$

なる一意的な解を許す．さらに

$$\operatorname{supp} u_j \subset \overline{\Omega_a} \quad (j=0,1), \quad \operatorname{supp} f(t,\cdot) \subset \overline{\Omega_{t+a}} \quad (t \ge 0) \tag{2.4}$$

ならば

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset \overline{\Omega_{t+a}} \quad (t \geq 0)$$

が成立つ．ここで，$a > 1$ に対して $\Omega_a := \Omega \cap B_a(0)$ とおいた．

さらに，関数解析的な手法により，解 $u(t)$ は (2.7) のように表すことができる．まず，

$$C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega}) = \{\vec{u}_0 \in (C^\infty_0(\overline{\Omega}))^2 \,|\, u_j = 0 \text{ on } \partial\Omega \ (j = 0, 1, \cdots)\}$$

とおくと，上述の性質から，$t \geq 0$ に対して $U(t): C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega})$ を

$$U(t)\vec{u}_0 \equiv (K[\vec{u}_0](t), \partial_t K[\vec{u}_0](t))$$

により定めることができ，

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad (t, s \geq 0), \quad U(0) = I_{C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega})}$$

が成立つ．さらに，エネルギー保存則から

$$\|U(t)\vec{u}_0\|_E = \|\vec{u}_0\|_E \quad (\forall \vec{u}_0 \in C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega}))$$

も従う．但し，

$$\|\vec{u}_0\|_E = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega \{|\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2\} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

よって，$C^\infty_{0,D}(\overline{\Omega})$ をノルム $\|\cdot\|_E$ により完備化した空間を H とするとき，$U(t)$ は H から H へのユニタリ作用素に一意的に拡張され，

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad (t, s \geq 0)$$

および $U(t)h \in C([0,\infty): H)$ が任意の $h \in H$ に対して成立つ．つまり，$U(t)$ は H 上の強連続な等長群となる．

ここで，A を $U(t)$ の生成作用素とする．即ち，$A: H \longrightarrow H$ は

$$\mathcal{D}(A) = \{h \in H \,|\, \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}(U(t)h - h) \text{ が } H \text{ の中に存在する}\},$$
$$Ah = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}(U(t)h - h) \quad (h \in \mathcal{D}(A))$$

なる作用素とする．このとき，$h \in \mathcal{D}(A), t \geq 0$ に対して

$$U(t)h \in \mathcal{D}(A), \quad \frac{d}{dt}U(t)h = AU(t)h = U(t)Ah$$

が成立つ．さらに，ストーンの定理から $-iA$ は自己共役作用素であるから，

$$\mathcal{D}(A)=\{h\in H\mid Ah\in H\},$$
$$\langle Ah,\varphi\rangle_H=-\langle h,(\varphi_1,\Delta\varphi_0)\rangle_H\quad(\forall\varphi=(\varphi_0,\varphi_1)\in(C_0^\infty(\Omega))^2)$$

が成立つことが分かる．但し，

$$\langle h,g\rangle_H=\frac{1}{2}\int_\Omega\{\nabla h_0(x)\cdot\overline{\nabla g_0}+h_1(x)\overline{g_1(x)}\}dx.$$

よって，混合問題 (1.1)–(1.3) を発展方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t)=A\vec{u}(t)+\vec{f}(t),\quad t\in(0,T),\tag{2.5}$$
$$\vec{u}(0)=\vec{u}_0(x)\tag{2.6}$$

の形に書くことができ，$\vec{u}_0\in\mathcal{D}(A)$ かつ $\vec{f}(t),A\vec{f}(t)\in C([0,T]:H)$ ならば，その解 $\vec{u}(t)\in C^1([0,T]:H)$ は

$$\vec{u}(t)=U(t)\vec{u}_0+\int_0^t U(t-s)\vec{f}(s)ds,\quad t\in(0,T)\tag{2.7}$$

と表せる．ここで，$\vec{f}(t)=(0,f(t))$ とおいた．

次に，初期値問題の解の評価から混合問題の解の評価を導くのに有効な解の表示式 (2.8), (2.9) を導く．いま，$\psi_a\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ $(a\geq 1)$ を

$$\psi_a(x)=0\ (|x|\leq a),\quad \psi_a(x)=1\ (|x|\geq a+1)$$

なるものとし，$[A,B]:=AB-BA$ とおく．$a\leq b$ のとき，$\psi_a\psi_b\equiv\psi_b$ が成立つ．

Lemma 2.1 $\vec{u}_0\in(C^\infty(\Omega))^2$, $f\in C^\infty([0,T)\times\Omega)$ は *(2.4)* および無限次の両立条件を満たすとする．このとき，$(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ に対して次が成立つ：

$$K[\vec{u}_0](t,x)=\psi_1(x)K_0[\psi_2\vec{u}_0](t,x)+\sum_{i=1}^4 K_i[\vec{u}_0](t,x),\tag{2.8}$$

$$L[f](t,x)=\psi_1(x)L_0[\psi_2 f](t,x)+\sum_{i=1}^4 L_i[f](t,x).\tag{2.9}$$

但し，

$$K_1[\vec{u}_0](t,x)=(1-\psi_2(x))L[[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](t,x),\tag{2.10}$$
$$K_2[\vec{u}_0](t,x)=-L_0[[\psi_2,\Box]L[[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]]](t,x),\tag{2.11}$$
$$K_3[\vec{u}_0](t,x)=(1-\psi_3(x))K[(1-\psi_2)\vec{u}_0](t,x),\tag{2.12}$$
$$K_4[\vec{u}_0](t,x)=-L_0[[\psi_3,\Box]K[(1-\psi_2)\vec{u}_0]](t,x)\tag{2.13}$$

であり,

$$L_1[f](t,x) = (1-\psi_2(x))L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](t,x), \tag{2.14}$$
$$L_2[f](t,x) = -L_0[\,[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]]](t,x), \tag{2.15}$$
$$L_3[f](t,x) = (1-\psi_3(x))L[(1-\psi_2)f](t,x), \tag{2.16}$$
$$L_4[f](t,x) = -L_0[\,[\psi_3,\Box]L[(1-\psi_2)f]](t,x) \tag{2.17}$$

とおいた.

Proof. (2.9) の証明も同様に出来るので, ここでは (2.8) のみ示す. まず,

$$K_1[\vec{u}_0] + K_2[\vec{u}_0] = L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]], \quad \text{in} \quad (0,T)\times\Omega, \tag{2.18}$$
$$K_3[\vec{u}_0] + K_4[\vec{u}_0] = K[(1-\psi_2)\vec{u}_0], \quad \text{in} \quad (0,T)\times\Omega, \tag{2.19}$$

を示す. (2.18) は次から従う:

$$\psi_2\, L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]] - L_0[\Box(\psi_2\, L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]])] = 0 \quad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbf{R}^3. \tag{2.20}$$

これを示すには, 左辺の関数が全空間で斉次波動方程式を満たし, 零初期条件を満足することに注意すれば十分である. また, (2.19) は同様にして導かれる次から従う:

$$\psi_3\, K[(1-\psi_2)\vec{u}_0] - L_0[\Box(\psi_3\, K[(1-\psi_2)\vec{u}_0])] = 0 \quad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbf{R}^3. \tag{2.21}$$

さて, (2.18), (2.19) より (2.8) は次から従う:

$$\psi_1\, K_0[\psi_2\vec{u}_0] + L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]] = K[\psi_2\vec{u}_0] \quad \text{in} \quad (0,T)\times\Omega. \tag{2.22}$$

(2.22) の左辺の関数は $(0,T)\times\Omega$ で斉次波動方程式を満たし, 境界でディリクレ条件を満足し, 初期値 $\psi_2\vec{u}_0$ を持つので, 古典解の一意性から (2.22) が成り立つ. 以上により, (2.8) が示された. □

3 基礎となる評価式

まず, 混合問題 (1.1)–(1.3) の解に対する局所減衰評価を導入する. そのために次の定義を用意する.

Definition. $\overline{\mathcal{O}} \subset B_1(0)$ なる有界領域 $\mathcal{O}$ が非捕捉的であるとは, 任意の $R>1$ に対して, ある $T=T(R)>0$ があって次が成立つ事とする: 勝手な Ω_R 内の点から任意の方向に発する幾何光学の光線が時間 T 経過するまでの間に必ず Ω_R の外に出る. 但し, $\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$, $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$ である.

さて, [17, Lemmas 4.3 and Ap. 4] では, 次の評価式が導かれた.

Lemma 3.1 $\overline{\mathcal{O}} \subset B_{1/2}(0)$ なる有界領域 $\mathcal{O}$ は非捕捉的であるとし，$\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ とおく．また，$0 < \gamma \leq 2$, $a, b > 1/2$, $m \geq 2$ とし，$\vec{u}_0$, f は *(2.1)*, $(m-1)$ 次の両立条件および

$$supp\, u_j \subset \overline{\Omega_a} \quad (j = 0, 1), \quad supp\, f(t, \cdot) \subset \overline{\Omega_a} \quad (t \geq 0) \tag{3.1}$$

を満たすものとする．このとき，混合問題 (1.1)-(1.3) の解 $u(t)$ に対して，ある正定数 $C = C(\gamma, a, b, m, \Omega)$ があって，$t \in [0, T)$ に対して次が成立つ：

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_{t,x}^\alpha u(t, \cdot) : L^2(\Omega_b)\| \leq C(1+t)^{-\gamma} \Big(\|\vec{u}_0 : H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)\| \tag{3.2}$$
$$+ \sup_{0 \leq s \leq t} (1+s)^\gamma \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|\partial_{s,x}^\alpha f(s, \cdot) : L^2(\Omega)\| \Big).$$

次に，初期値問題 (1.4)-(1.5) の解に対する一様減衰評価を導入する．まず，Γ_j $(j = 0, 1, \cdots, 6)$ により次のいずれかのベクトル場を表すことにする：

$$\partial_0 = \partial_t, \quad \partial_j \ (j = 1, 2, 3), \quad \Lambda_{ij} = x_j \partial_i - x_i \partial_j \ (1 \leq i < j \leq 3). \tag{3.3}$$

さらに，滑らかな関数 $v(t, x)$ および非負整数 m に対して

$$|v(t, x)|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} |\Gamma^\alpha v(t, x)|$$

とおく．但し，$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_6)$ は多重指数，$\Gamma^\alpha = \Gamma_0^{\alpha_0} \Gamma_1^{\alpha_1} \cdots \Gamma_6^{\alpha_6}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_6$. 次の関係式により，各 Γ_j を施す順番は本質的でないことが分かる：

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] = \sum_{k=0}^{6} c_{ij}^k \Gamma_k \quad (i, j = 0, 1, \cdots, 6). \tag{3.4}$$

ここに c_{ij}^k は適当な定数である．また，次も成り立つ：

$$[\Gamma_i, \Box] = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, 6). \tag{3.5}$$

さて，斉次波動方程式の解に対して，[2, Proposition 1.1] は次を示した．

Lemma 3.2 $\nu > 0$ とし，

$$\widetilde{\Phi}_\nu(t, x) = \begin{cases} (1 + t + |x|)^\nu & \textit{if } \nu < 0, \\ \log^{-1}\left(2 + \dfrac{1 + t + |x|}{1 + |t - |x||}\right) & \textit{if } \nu = 0, \\ (1 + |t - |x||)^\nu & \textit{if } \nu > 0 \end{cases}$$

とおく．$\vec{v}_0 \in (C_0^\infty(\mathbf{R}))^2$ のとき，ある正定数 $C = C(\nu)$ があって，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle \widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|K_0[\vec{v_0}](t,x)| \\ &\le C\Bigg(\sum_{|\alpha|\le 1} \| |\cdot| \langle\cdot\rangle^\nu \partial^\alpha v_0 : L^\infty(\mathbf{R}^3)\| + \| |\cdot| \langle\cdot\rangle^\nu v_1 : L^\infty(\mathbf{R}^3)\| \Bigg)\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成立つ．

さて，非斉次波動方程式の解に対して，[18, Proposition 3.1] は次を示した．

Lemma 3.3 $\kappa > 0$ とし，

$$\Phi_\kappa(t) = \begin{cases} \log(2+t) & \textit{if } \kappa = 1, \\ 1 & \textit{if } \kappa \ne 1 \end{cases}$$

とおく．また，$g \in C^k([0,T) \times \mathbf{R}^3)$ に対して

$$\|g(t) : M_k(\nu,\kappa\,;c)\| = \sup_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbf{R}^3} |x| \langle s+|x|\rangle^\nu \langle cs-|x|\rangle^\kappa |g(s,x)|_k \tag{3.7}$$

と定める．ここに，$c, \nu, \kappa \ge 0$, $k \in \mathbf{N}$ とする．

(i) $c \ge 0$, $\nu > 0$, $\kappa \ge 1$ ならば，ある正定数 $C = C(c,\nu,\kappa)$ があって，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle \widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_0[g](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\kappa(t)\,\|g(t) : M_k(\nu,\kappa\,;c)\| + \|g(0) : M_{k-1}(\nu,0\,;c)\|)\end{aligned} \tag{3.8}$$

が成立つ．但し，$k = 0, 1$ のとき，右辺第二項は現れない．

(ii) $c = 1$ とする．このとき，$\nu, \kappa \ge 1$ ならば，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle \langle t-|x|\rangle^\rho |\partial_{t,x} L_0[g](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\rho(t)\,\|g(t) : M_{k+1}(\nu,\kappa\,;1)\| + \|g(0) : M_k(\nu+1,0\,;1)\|)\end{aligned} \tag{3.9}$$

が成立つ．但し，$\rho = \min(\nu,\kappa)$ であり，$k = 0$ のとき，右辺第二項は現れない．

(iii) $c \ne 1$ とする．このとき，$\nu > 0$, $\kappa \ge 1$ ならば，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle \langle t-|x|\rangle^\nu |\partial_{t,x} L_0[g](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\kappa(t)\,\|g(t) : M_{k+1}(\nu,\kappa\,;c)\| + \|g(0) : M_k(\nu+1,0\,;c)\|)\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成立つ．但し，$k = 0$ のとき，右辺第二項は現れない．

Corollary 3.4 まず，$\Lambda := \{(t,r) \in [0,\infty)^2 | r/2 \le t \le 2r\}$ として，

$$W(t,r) = \begin{cases} \langle r-t \rangle & \textit{if} \ (t,r) \in \Lambda, \\ \langle r \rangle & \textit{if} \ (t,r) \in [0,\infty)^2 \setminus \Lambda \end{cases} \tag{3.11}$$

とおく．さらに，$g \in C^k([0,T) \times \mathbf{R}^3)$ に対して

$$\|g(t) : M_k(\nu,\kappa)\| = \sup_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbf{R}^3} |x| \langle s+|x| \rangle^{\nu} W(s,|x|)^{\kappa} |g(s,x)|_k \tag{3.12}$$

と定める．ここに，$\nu, \kappa \ge 0$, $k \in \mathbf{N}$ とする．

(i) $\nu > 0$, $\kappa \ge 1$ ならば，ある正定数 $C = C(\nu,\kappa)$ があって，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle t+|x| \rangle \widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x) |L_0[g](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\kappa(t) \|g(t) : M_k(\nu,\kappa)\| + \|g(0) : M_{k-1}(\nu,0)\|) \end{aligned} \tag{3.13}$$

が成立つ．

(ii) $\nu, \kappa \ge 1$ ならば，$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle x \rangle \langle t-|x| \rangle^{\rho} |\partial_{t,x} L_0[g](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\rho(t) \|g(t) : M_{k+1}(\nu,\kappa)\| + \|g(0) : M_k(\nu+1,0)\|) \end{aligned} \tag{3.14}$$

が成立つ．但し，$\rho = \min(\nu,\kappa)$ である．

4 混合問題の解に対する一様減衰評価

Proposition 4.1 $\vec{u}_0 \in (C_0^\infty(\overline{\Omega}))^2$ は無限次の両立条件を満たすとする．また，k を非負整数とする．このとき，ある正定数 C があって，$(t,x) \in [0,T) \times \Omega$ に対して次が成立つ:

$$|K[\vec{u}_0](t,x)|_k \le C\langle t+|x| \rangle^{-1} \langle t-|x| \rangle^{-1}. \tag{4.1}$$

Proof. まず，$\vec{v}_0 \in (C_0^\infty(\mathbf{R}^3))^2$ に対して

$$\sum_{|\beta|\le m} |\Gamma^\beta K_0[\vec{v}_0](t,x)| \le C\langle t+|x| \rangle^{-1} \langle t-|x| \rangle^{-1}, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^3 \tag{4.2}$$

が成立つことに注意する．実際, $m=0$ のときは, (3.6) を $\nu = 2$ として適用すればよい．$m \ge 1$ のときは, (3.5) を使うと，$m=0$ の場合に帰着される．従って，(2.8) の右辺第一項は所望の評価をもつことが分かる．

次に，$K_1[\vec{u}_0]$ を考える．そのために，

$$\sum_{|\beta|\le m} \|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](t):L^2(\Omega_3)\| \le C\langle t\rangle^{-2}, \quad t\in[0,T) \tag{4.3}$$

を示す．ここに，$\partial=(\partial_t,\nabla_x)$, $[A,B]:=AB-BA$ であり，以下が成立つことは容易に確かめられる：

$$[\psi_a,\Box]u(t,x)=u(t,x)\Delta\psi_a(x)+2\nabla_x u(t,x)\cdot\nabla_x\psi_a(x), \quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^3,$$
$$\sum_{|\alpha|\le m}\|\Gamma^\alpha[\psi_a,\Box]u(t):L^2(\Omega)\| \le C\sum_{|\alpha|\le m+1}\|\partial^\alpha u(t):L^2(\Omega_{a+1})\|, \quad t\in(0,T).$$

さて，(3.2) を $\vec{u}_0=0$, $\gamma=2$ として使うと，(4.3) の左辺は次のように評価される：

$$\begin{aligned}&C\langle t\rangle^{-2}\sup_{0\le s\le t}(1+s)^2\sum_{|\alpha|\le m-1}\|\partial^\alpha\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0](s):L^2(\Omega)\|\\ \le\, &C\langle t\rangle^{-2}\sup_{0\le s\le t}(1+s)^2\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha K_0[\psi_2\vec{u}_0](s):L^2(\Omega_2)\|.\end{aligned}$$

ここで，(4.2) を使うと (4.3) が従う．

さて，$|\alpha|\le k$ なる α をとる．ソボレフの不等式および (4.3) により，

$$\begin{aligned}|\Gamma^\alpha K_1[\vec{u}_0](t,x)| &\le \sum_{|\beta|\le 2} C\|\partial_x^\beta\Gamma^\alpha((1-\psi_2)L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]])(t):L^2(\Omega)\|\\ &\le \sum_{|\beta|\le|\alpha|+2} C\|\partial^\alpha L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](t):L^2(\Omega_3)\| \le C\langle t\rangle^{-2}.\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{supp}K_1[\vec{u}_0](t,\cdot)\subset\overline{\Omega_3}$ に注意すると，所望の評価が得られる．

次に，$K_2[\vec{u}_0]$ を評価する．(3.8) を $c=0$, $\nu=2$, $\kappa>1$ として使うと，

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle|K_2[\vec{u}_0](t,x)|_k\\ &\le C\|\,[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](t):M_k(2,\kappa\,;0)\|\\ &\quad +C\|\,[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](0):M_{k-1}(2,0\,;0)\|\end{aligned}$$

を得る．第一項は，さらに

$$\begin{aligned}&C\sup_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^3}\langle s\rangle^2|[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](s,x)|_k\\ \le\, &C\sup_{s\in[0,t)}\langle s\rangle^2\sum_{|\beta|\le k+3}\|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](s):L^2(\Omega_3)\|\end{aligned}$$

と評価できるので，(4.3) から有界と分かる．また，第二項も

$$
\begin{aligned}
&C \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sum_{|\beta|\le k-1} |\partial^\beta([\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]])(0,x)| \\
&\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sum_{|\beta|\le k+2} \|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]K_0[\psi_2\vec{u}_0]](0):L^2(\Omega_3)\|
\end{aligned}
$$

と評価できるので，(4.3) から有界と分かる．故に，$K_2[\vec{u}_0]$ が所望の評価を持つことが分かる．

次に，$K_3[\vec{u}_0]$ を考える．まず, (3.2) を $f(t)=0, \gamma=2$ として使うと，

$$
\sum_{|\beta|\le m} \|\partial^\beta K[(1-\psi_2)\vec{u}_0](t):L^2(\Omega_4)\| \le C\langle t\rangle^{-2}, \quad t\in[0,T) \tag{4.4}
$$

が得られる．よって，$K_1[\vec{u}_0]$ の評価と同様に，ソボレフの不等式および (4.4) から $K_3[\vec{u}_0]$ が所望の評価を持つことが分かる．

最後に，$K_4[\vec{u}_0]$ を評価する．(3.8) を $c=0,\ \nu=2,\ \kappa>1$ として使うと，

$$
\begin{aligned}
&\langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle|K_4[\vec{u}_0](t,x)|_k \\
&\le C\|\,[\psi_3,\Box]K[(1-\psi_2)\vec{u}_0])](t):M_k(2,\kappa;0)\| \\
&\quad +C\|\,[\psi_3,\Box]K[(1-\psi_2)\vec{u}_0])](0):M_{k-1}(2,0;0)\|.
\end{aligned}
$$

よって，(4.4) を使えば，$K_2[\vec{u}_0]$ の評価と同様にして，$K_4[\vec{u}_0]$ が所望の評価を持つことが分かる．以上により (4.1) が示された．$\Box$

Proposition 4.2 $f\in C^\infty([0,T)\times\Omega)$ は無限次の両立条件を満たすとし，

$$
\|f(t):N_k(\nu,\kappa;c)\| = \sup_{(s,x)\in[0,t)\times\Omega} |x|\langle s+|x|\rangle^\nu\langle cs-|x|\rangle^\kappa|f(s,x)|_k \tag{4.5}
$$

とおく．ここに，$c,\nu,\kappa\ge 0,\ k\in\mathbf{N}$ とする．

(i) $c\ge 0,\ 0<\nu\le 2,\ \kappa\ge 1$ ならば，ある正定数 C があって，$(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L[f](t,x)|_k \\
&\le C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+3}(\nu,\kappa;c)\| + \|f(0):N_{k+2}(\nu,0;c)\|)
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

が成立つ．

(ii) $c=1$ とする．このとき, $1\le\nu\le 2,\ \kappa\ge 1$ ならば，$(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle^\rho|\partial_{t,x}L[f](t,x)|_k \\
&\le C(\Phi_\rho(t)\,\|f(t):N_{k+4}(\nu,\kappa;1)\| + \|f(0):N_{k+3}(\nu+1,0;1)\|)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

が成立つ．但し，$\rho=\min(\nu,\kappa)$ である．

(iii) $c \neq 1$ とする．このとき，$0 < \nu \leq 2$, $\kappa \geq 1$ ならば，$(t,x) \in [0,T) \times \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle^{\nu}|\partial_{t,x}L[f](t,x)|_k \\ &\leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+4}(\nu,\kappa;c)\| + \|f(0):N_{k+3}(\nu+1,0;c)\|) \end{aligned} \tag{4.8}$$

が成立つ．

Proof. <u>(i) について</u>: まず，(3.8) から，$\mathrm{supp}(\psi_2 f)(t,\cdot) \subset \Omega$ に注意すれば，(2.9) の右辺第一項は所望の評価をもつことが分かる．

次に，$L_1[f]$ を考える．そのために，$0 < \nu \leq 2$, $\kappa \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle t\rangle^{\nu} \sum_{|\beta|\leq m} \|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](t):L^2(\Omega_3)\| \\ &\leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_m(\nu,\kappa;c)\| + \|f(0):N_{m-1}(\nu,0;c)\|), \quad t\in[0,T) \end{aligned} \tag{4.9}$$

を示す．(3.2) を $\vec{u}_0 = 0$, $\gamma = \nu$ として使うと，(4.9) の左辺は次のように評価される：

$$\begin{aligned} &C \sup_{0\leq s\leq t}(1+s)^{\nu} \sum_{|\alpha|\leq m-1} \|\partial^\alpha [\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f](s):L^2(\Omega)\| \\ &\leq C \sup_{0\leq s\leq t}(1+s)^{\nu} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha L_0[\psi_2 f](s):L^2(\Omega_2)\|. \end{aligned}$$

ここで，$x \in \Omega_2$ のとき $\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(s,x)$ と $\langle s\rangle^{\nu-1}$ が同等であることに注意すると，(3.8) から (4.9) が従う．故に，ソボレフの不等式により，

$$\langle t\rangle^{\nu}|L_1[f](t,x)|_k \leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+2}(\nu,\kappa;c)\| + \|f(0):N_{k+1}(\nu,0;c)\|) \tag{4.10}$$

を得る．よって，$L_1[f]$ が所望の評価をもつことが分かる．

次に，$L_2[f]$ を評価する．(3.8) を $c=0$, $0<\nu\leq 2$, $\kappa > 1$ として使うと，

$$\begin{aligned} &\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_2[f](t,x)|_k \\ &\leq C\|\,[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](t):M_k(\nu,\kappa;0)\| \\ &\quad + C\|\,[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](0):M_{k-1}(\nu,0;0)\| \end{aligned}$$

を得る．第一項は，さらに

$$\begin{aligned} &C \sup_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^3} \langle s\rangle^{\nu}|[\psi_2,\Box]L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](s,x)|_k \\ &\leq C \sup_{s\in[0,t)} \langle s\rangle^{\nu} \sum_{|\beta|\leq k+3} \|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](s):L^2(\Omega_3)\| \end{aligned}$$

と評価できる．また，第二項も同様に評価できるので，(4.9) から

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_2[f](t,x)|_k \\ &\le C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+3}(\nu,\kappa\,;c)\|+\|f(0):N_{k+2}(\nu,0\,;c)\|)\end{aligned}\tag{4.11}$$

が導かれる．

次に，$L_3[f]$ を考える．(3.2) を $\vec{u}_0=0$, $\gamma=\nu$ として使うと，

$$\begin{aligned}&\langle t\rangle^\nu\sum_{|\beta|\le m}\|\partial^\beta L[\,(1-\psi_2)f]](t):L^2(\Omega_4)\| \\ &\le C\sup_{0\le s\le t}(1+s)^\nu\sum_{|\alpha|\le m-1}\|\partial^\alpha((1-\psi_2)f)(s):L^2(\Omega)\| \\ &\le C\sup_{0\le s\le t}(1+s)^\nu\sup_{x\in\Omega_3}|f(s,x)|_{m-1} \\ &\le C\|f(t):N_{m-1}(\nu,\kappa\,;c)\|\end{aligned}\tag{4.12}$$

を得る．故に，ソボレフの不等式により，

$$\langle t\rangle^\nu|L_3[f](t,x)|_k\le C\|f(t):N_{k+1}(\nu,\kappa\,;c)\|\tag{4.13}$$

となり，$L_3[f]$ が所望の評価をもつことが分かる．

次に，$L_4[f]$ を評価する．(3.8) を $c=0$, $0<\nu\le 2$, $\kappa>1$ として使うと，

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_4[f](t,x)|_k \\ &\le C\|\,[\psi_3,\Box]L[(1-\psi_2)f](t):M_k(\nu,\kappa\,;0)\| \\ &\quad+C\|\,[\psi_3,\Box]L[(1-\psi_2)f](0):M_{k-1}(\nu,0\,;0)\|\end{aligned}$$

を得る．第一項は，さらに

$$C\sup_{s\in[0,t)}\langle s\rangle^\nu\sum_{|\beta|\le k+3}\|\partial^\beta L[(1-\psi_2)f](s):L^2(\Omega_4)\|$$

と評価できる．また，第二項も同様に評価できるので，(4.12) から

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_4[f](t,x)|_k \\ &\le C(\|f(t):N_{k+2}(\nu,\kappa\,;c)\|+\|f(0):N_{k+1}(\nu,0\,;c)\|)\end{aligned}\tag{4.14}$$

が導かれる．以上により，(4.6) が示された．

<u>*(ii)*, *(iii)* について:</u>　まず，(2.9) の右辺第一項は，$c=1$ あるいは $c\neq 1$ に応じて，(3.9) または (3.10) を使えば，所望の評価を持つことが分かる．また，(4.10)，(4.13) 及び $\Phi_\kappa(t)\le\Phi_\rho(t)$ により，$L_1[f]$, $L_3[f]$ が所望の評価を持つことも分かる．

次に，$L_2[f]$ を考える．(3.10) を $c=0,\ 0<\nu\le 2,\ \kappa>1$ として使うと，

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle^{\nu}|\partial_{t,x}L_2[f](t,x)|_k\\ &\le C\|\,[\psi_2,\square]L[\,[\psi_1,\square]L_0[\psi_2 f]](t):M_{k+1}(\nu,\kappa\,;0)\|\\ &\quad+C\|\,[\psi_2,\square]L[\,[\psi_1,\square]L_0[\psi_2 f]](0):M_k(\nu+1,0\,;0)\|\end{aligned}$$

を得る．よって，(4.9) を用いれば，前の計算と同様にして $L_2[f]$ が所望の評価を持つことが分かる．

最後に，$L_4[f]$ を評価する．(3.10) を $c=0,\ 0<\nu\le 2,\ \kappa>1$ として使うと，

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle^{\nu}|\partial_{t,x}L_4[f](t,x)|_k\\ &\le C\|\,[\psi_3,\square]L[(1-\psi_2)f](t):M_{k+1}(\nu,\kappa\,;0)\|\\ &\quad+C\|\,[\psi_3,\square]L[(1-\psi_2)f](0):M_k(\nu+1,0\,;0)\|\end{aligned}$$

を得る．よって，(4.12) を用いれば，前の計算と同様にして $L_4[f]$ が所望の評価を持つことが分かる．以上により，(4.7), (4.8) が示された． □

Proposition 4.3 $f\in C^\infty([0,T)\times\Omega)$ は無限次の両立条件を満たすとし，

$$\|f(t):N_k(\nu,\kappa)\|=\sup_{(s,x)\in[0,t)\times\Omega}|x|\langle s+|x|\rangle^{\nu}\,W(s,|x|)^{\kappa}\,|f(s,x)|_k \tag{4.15}$$

と定める．ここに，$W(t,r)$ は *(3.11)* で定義されたものであり，$\nu,\kappa\ge 0,\ k\in\mathbf{N}$ とする．

(i) $0<\nu\le 2,\ \kappa\ge 1$ ならば，ある正定数 C があって，$(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L[f](t,x)|_k\\ &\le C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+3}(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{k+2}(\nu,0)\|)\end{aligned} \tag{4.16}$$

が成立つ．

(ii) $1\le\nu\le 2,\ \kappa\ge 1$ ならば，$(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle^{\rho}|\partial_{t,x}L[f](t,x)|_k\\ &\le C(\Phi_\rho(t)\,\|f(t):N_{k+4}(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{k+3}(\nu+1,0)\|)\end{aligned} \tag{4.17}$$

が成立つ．但し，$\rho=\min(\nu,\kappa)$ である．

Proof. 証明は Proposition 4.2 のそれに順ずるので，異なる部分のみ述べる．

(i) について: まず，(2.9) の右辺第一項は, (3.13) を使えば，所望の評価を持つことが分かる．

次に，$L_1[f]$ を考える．(3.2) を $\vec{u}_0=0, \gamma=\nu$ として使い，さらに (3.13) を利用すると，$0<\nu\leq 2, \kappa\geq 1$ に対して

$$\langle t\rangle^\nu \sum_{|\beta|\leq m} \|\partial^\beta L[\,[\psi_1,\Box]L_0[\psi_2 f]](t):L^2(\Omega_3)\| \\ \leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_m(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{m-1}(\nu,0)\|), \quad t\in[0,T) \tag{4.18}$$

が成り立つことが分かる．故に，ソボレフの不等式により，

$$\langle t\rangle^\nu|L_1[f](t,x)|_k \leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+2}(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{k+1}(\nu,0)\|) \tag{4.19}$$

を得る．よって，$L_1[f]$ が所望の評価をもつことが分かる．

次に，$L_2[f]$ を評価する．(4.9) の代わりに (4.18) を使えば，

$$\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_2[f](t,x)|_k \\ \leq C(\Phi_\kappa(t)\,\|f(t):N_{k+3}(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{k+2}(\nu,0\|) \tag{4.20}$$

が導かれる．

次に，$L_3[f]$ を考える．前の計算と同様にして

$$\langle t\rangle^\nu \sum_{|\beta|\leq m} \|\partial^\beta L[\,(1-\psi_2)f]](t):L^2(\Omega_4)\| \leq C\|f(t):N_{m-1}(\nu,\kappa)\| \tag{4.21}$$

を得る．故に，ソボレフの不等式により，

$$\langle t\rangle^\nu|L_3[f](t,x)|_k \leq C\|f(t):N_{k+1}(\nu,\kappa)\| \tag{4.22}$$

となり，$L_3[f]$ が所望の評価をもつことが分かる．

次に，$L_4[f]$ を評価する．(4.12) の代わりに (4.21) を使えば，

$$\langle t+|x|\rangle\widetilde{\Phi}_{\nu-1}(t,x)|L_4[f](t,x)|_k \leq C(\|f(t):N_{k+2}(\nu,\kappa)\|+\|f(0):N_{k+1}(\nu,0)\|) \tag{4.23}$$

が導かれる．以上により，(4.16) が示された．

<u>(ii) について:</u> まず，(2.9) の右辺第一項は，(3.14) を使えば，所望の評価を持つことが分かる．また，(4.19)，(4.22) 及び $\Phi_\kappa(t)\leq\Phi_\rho(t)$ により，$L_1[f]$, $L_3[f]$ が所望の評価を持つことも分かる．さらに，(4.9) の代わりに (4.18) を使えば，$L_2[f]$ が所望の評価を持つことが分かる．また，(4.12) の代わりに (4.21) を使えば，$L_4[f]$ が所望の評価を持つことも分かる．以上により，(4.17) が示された． □

Proposition 4.4 $\overline{\mathcal{O}} \subset B_{1/2}(0)$ なる有界領域 $\mathcal{O}$ は非捕捉的であるとする．また，$0 < \nu \le 2$, $\kappa \ge 1$, $m \ge 2$ とし，$f \in C^\infty([0,T) \times \Omega)$ は無限次の両立条件を満たすものとする．このとき，ある正定数 $C = C(\nu, \kappa, m, \Omega)$ があって，$t \in [0,T)$ に対して次が成立つ：

$$\begin{aligned} &\langle t \rangle^\nu \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial_{t,x}^\alpha L[f](t,\cdot) : L^2(\Omega_{3/4})\| \\ &\le C(\Phi_\kappa(t) \|f(t) : N_{m+3}(\nu,\kappa)\| + \|f(0) : N_{m+2}(\nu, 0)\|). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Proof. (2.9) より，(4.24) の左辺は

$$C\langle t \rangle^\nu \sum_{j=1}^{4} \sup_{x \in \Omega_{3/4}} |L_j[f](t,x)|_m$$

と評価できる．ここで，(4.19), (4.20)，(4.22), (4.23) を使えば，(4.24) が得られる．□

5 非線型摂動への応用

この節では次の非線型波動方程式に対する混合問題を考える：

$$\square u = F(\partial u) \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \tag{5.1}$$

$$u(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega, \tag{5.2}$$

$$u(0,x) = \varepsilon\phi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varepsilon\psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.3}$$

ここで，ε は正のパラメータ，ϕ, $\psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ であり，

$$F(\partial u) = \sum_{a,b=0}^{3} A_{a,b}(\partial_a u)(\partial_b u) \tag{5.4}$$

とする．但し，$A_{a,b}$ は定数である．

Theorem 5.1 $F(\partial u)$ は (5.4) のように書けていて，ϕ, $\psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ は 両立条件を満たしているとする．このとき，正定数 ε_0, C が存在して，$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ なる全ての ε に対して混合問題 (5.1)–(5.3) の解 $u \in C^\infty([0,T_\varepsilon) \times \Omega)$ が存在し，最大存在時刻 T_ε について

$$T_\varepsilon \ge \exp(C\varepsilon^{-1}) \tag{5.5}$$

が成立つ．

Proof. [17] により混合問題 (5.1)–(5.3) の局所解の存在は知られているので，上の定理を示すには適当な量のア・プリオリ評価を行えば十分である．具体的には，

$$e(T) \equiv \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\Omega} \langle x\rangle\langle t-|x|\rangle\,|\partial u(t,x)|_N \tag{5.6}$$
$$+\sup_{t\in[0,T)}\left(\sum_{|\alpha|\le 2N}\|\partial^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|\le 2N-1}\langle t\rangle^{-1/2}\,\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\|\right.$$
$$\left.+\sum_{|\alpha|\le 2N-8}\log^{-1/2}(2+t)\,\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|\le 2N-15}\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\|\right)$$

について，$N\ge 21$, $0<\varepsilon\le 1$ として

$$e(T)\le C_0(\varepsilon+D(T)) \tag{5.7}$$

を示せばよい．但し，C_0 は T によらない普遍定数であり，

$$D(T)=\log^{1/2}(2+T)e(T)^{3/2}+\log(2+T)e(T)^2. \tag{5.8}$$

第一段. 時間微分のエネルギー評価

まず，

$$E(u;t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\{|\partial_t u(t,x)|^2+|\nabla_x u(t,x)|^2\}dx \tag{5.9}$$

とおく．境界条件 (5.2) により，任意の $(t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega$ に対して $\partial_t^j u(t,x)=0$ $(j=0,1,\cdots)$ であるから，通常のエネルギー法により

$$\frac{d}{dt}E(\partial_t^j u;t)=\int_\Omega \partial_t^j F(\partial u)(t,x)\,\partial_t^{j+1}u(t,x)dx$$

を得る．ここで，$|\partial u(t,x)|_N\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)$ を使うと

$$\frac{d}{dt}E(\partial_t^j u;t)\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)\sum_{k=0}^{j}\int_\Omega|\partial_t^k\partial u(t,x)|\,|\partial_t^{j+1}u(t,x)|dx$$
$$\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)\sum_{k=0}^{2N}\|\partial_t^k\partial u(t):L^2(\Omega)\|^2\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)^3$$

が $j=0,1,\cdots,2N$ なる全ての j に対して成り立つことが分かる．よって，任意の $t\in[0,T)$ に対して

$$\sum_{j=0}^{2N}\|\partial_t^j\partial u(t):L^2(\Omega)\|\le C(\varepsilon+\log^{1/2}(2+T)\,e(T)^{3/2}) \tag{5.10}$$

を得る.

第二段. 時空間微分のエネルギー評価

空間微分はディリクレ境界条件を保存しないので，次のような楕円性評価を用いる: m を 2 以上の自然数とし，$v \in H^m(\Omega) \cap H_\nabla(\Omega)$ とするとき

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial_x^\alpha v : L^2(\Omega)\| \le C\Big(\sum_{|\beta| \le m-2} \|\partial_x^\beta \Delta v : L^2(\Omega)\| + \|\nabla_x v : L^2(\Omega)\|\Big) \tag{5.11}$$

が成り立つ. 但し，$H_\nabla(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ のディリクレ・ノルム $\|\nabla_x v : L^2(\Omega)\|$ による完備化とする.

上の評価をもとに，$1 \le j + |\alpha| \le 2N+1$ なる任意の (j, α) に対して次の評価式が成り立つ事を示す:

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha u(t) : L^2(\Omega)\| \le C(\varepsilon + \log^{1/2}(2+T)\, e(T)^{3/2} + e(T)^2). \tag{5.12}$$

まず，$j + |\alpha| = 1$ のときは，(5.10) から直ちに従う. 次に，l を $2N$ 以下の自然数とし，$j + |\alpha| = l + 1$ とする. $(j, |\alpha|) = (l+1, 0), (l, 1)$ のとき，(5.10) から (5.12) が従う. また，$j = l + 1 - m$, $|\alpha| = m$ $(2 \le m \le l+1)$ のとき，(5.11) から

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^j \partial_x^\alpha u(t) : L^2(\Omega)\| \\ &\le C\Big(\sum_{|\beta| \le m-2} \|\partial_t^j \partial_x^\beta \Delta u(t) : L^2(\Omega)\| + \|\partial_t^j \nabla_x u(t) : L^2(\Omega)\|\Big) \end{aligned}$$

を得る. ここで，$0 \le j \le l - 1 \le 2N - 1$ に注意すると，第二項が必要な評価をもつことが (5.10) から分かる. 一方，第一項は方程式 (5.1) を使うと

$$C \sum_{|\beta| \le m-2} \big(\|\partial_t^{l+3-m} \partial_x^\beta u(t) : L^2(\Omega)\| + \|\partial_t^{l+1-m} \partial_x^\beta F(\partial u)(t) : L^2(\Omega)\|\big)$$

と書き換えられる. ここで，$(l + 1 - m) + |\beta| \le l - 1 \le 2N - 1$ に注意すると，この第二項は

$$C|\partial u(t,x)|_N \sum_{|\alpha| \le 2N-1} \|\partial^\alpha \partial u(t) : L^2(\Omega)\| \le C e(T)^2$$

と評価できる. また，第一項は，m を $2, \cdots, l+1$ と変化させていけば順次評価できる. 例えば，$m = 2$ のときは $(j, |\alpha|) = (l+1, 0)$ に，$m = 3$ のときは $(j, |\alpha|) = (l+1, 0)$, $(l, 1)$ に，$m = 4$ のときは $(j, |\alpha|) = (l+1, 0)$, $(l, 1)$, $(l-1, 2)$ の時の評価に帰着される. よって，(5.12) が $1 \le j + |\alpha| \le 2N+1$ なる任意の (j, α) に対して成り立つ.

結局，(5.12) から，任意の $t \in [0,T)$ に対して

$$\sum_{|\alpha|\le 2N} \|\partial^\alpha \partial u(t) : L^2(\Omega)\| \le C(\varepsilon + D(T)) \tag{5.13}$$

が従う．但し，$D(T)$ は (5.8) で定められた量とする．

第三段. Γ 微分のエネルギー評価

(3.5) により，次のエネルギー等式が導かれる：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(\Gamma^\alpha u;t) &= \int_\Omega \Gamma^\alpha F(\partial u)(t,x)\,\partial_t \Gamma^\alpha u(t,x)dx\\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \nu\cdot\nabla_x \Gamma^\alpha u(t,x)\,\partial_t\Gamma^\alpha u(t,x)dx\end{aligned}$$

但し，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．さて，$|\partial u(t,x)|_N \le C\langle t\rangle^{-1}e(T)$ なので，$|\alpha| \le 2N-1$ のとき，右辺第一項は

$$C\langle t\rangle^{-1}e(T)\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\|\Gamma^\beta \partial u(t):L^2(\Omega)\|^2$$

と評価できる．また，$\partial\Omega \subset B_{1/2}(0)$ なので，任意の $(t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega$ に対して $|\Gamma^\alpha u(t,x)| \le C\sum_{|\beta|\le|\alpha|}|\partial^\beta u(t,x)|$ となる．さらに，トレース定理を用いれば，第二項は

$$C\sum_{|\beta|\le|\alpha|+1}\|\partial^\beta\partial u(t):L^2(\Omega_{3/4})\|^2$$

と評価できるので，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(\Gamma^\alpha u;t) &\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\|\Gamma^\beta\partial u(t):L^2(\Omega)\|^2\\ &\quad + C\sum_{|\beta|\le|\alpha|+1}\|\partial^\beta\partial u(t):L^2(\Omega_{3/4})\|^2\end{aligned} \tag{5.14}$$

を得る．

(5.14) をもとに，まず，任意の $t \in [0,T)$ に対して

$$\sum_{|\alpha|\le 2N-1}\langle t\rangle^{-1/2}\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\| \le C(\varepsilon + D(T)) \tag{5.15}$$

を導く．但し，$D(T)$ は (5.8) で定められた量とする．

さて，$\sum_{|\beta|\le 2N-1}\|\Gamma^\beta\partial u(t):L^2(\Omega)\| \le \langle t\rangle^{1/2}e(T)$ および (5.13) より，$|\alpha| \le 2N-1$ なる α に対して

$$\frac{d}{dt}E(\Gamma^\alpha u;t) \le Ce(T)^3 + C(\varepsilon + D(T))^2$$

を得る．さらに，

$$E(\Gamma^\alpha u;t) \le C\varepsilon^2 + C\langle t\rangle (e(T)^3 + (\varepsilon + D(T)^2) \le C\langle t\rangle(\varepsilon^2 + D(T)^2)$$

と評価でき，(5.15) が従う．

次に，任意の $t \in [0,T)$ に対して

$$\sum_{|\alpha|\le 2N-8} \log^{-1/2}(2+t)\, \|\Gamma^\alpha \partial u(t) : L^2(\Omega)\| \le C(\varepsilon + D(T)) \tag{5.16}$$

を導く．その為に，まず

$$\sum_{|\beta|\le 2N-7} \|\partial^\beta \partial u(t) : L^2(\Omega_{3/4})\| \le C\langle t\rangle^{-1/2}\,(\varepsilon + D(T)) \tag{5.17}$$

を示す．$u(t,x)$ は

$$u = \varepsilon K[\phi,\psi] + L[F(\partial u)] \quad \text{in } (0,T)\times\Omega, \tag{5.18}$$

と表され，(3.2) より，全ての $\nu > 0,\, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{|\beta|\le m} \|\partial^\beta \partial K[\phi,\psi](t) : L^2(\Omega_{3/4})\| \le C\langle t\rangle^{-\nu} \tag{5.19}$$

と評価される．よって，(5.17) を示すためには, $0 < \varepsilon \le 1$ より

$$\sum_{|\alpha|\le 2N-6} \langle t\rangle^{1/2}\, \|\partial^\alpha L[F(\partial u)](t) : L^2(\Omega_{3/4})\| \le C(\varepsilon^2 + \log(2+t)\, e(T)^2) \tag{5.20}$$

を導けば十分である．(4.24) より, (5.20) は

$$\|F(\partial u)(t) : N_{2N-3}(1/2,1)\| \le Ce(T)^2 \tag{5.21}$$

から従うことが分かる．

ここで，$v \in C_0^2(\overline{\Omega})$ に対して，ソボレフ型の不等式：

$$|x||v(x)| \le C \sum_{|\alpha|\le 2} \|\Gamma^\alpha v : L^2(\Omega)\| \quad (\forall\, x \in \Omega) \tag{5.22}$$

が成立つことに注意する．実際，$w \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ に対して，

$$|x||w(x)| \le C \sum_{|\alpha|\le 2} \|\Gamma^\alpha w : L^2(\mathbb{R}^3)\| \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^3)$$

が成立つことが [11] により示されており, $v=\psi_1 v+(1-\psi_1)v$ と書き換えて, (5.22) の左辺を評価すると

$$\begin{aligned} & C\sum_{|\alpha|\le 2}\|\Gamma^\alpha(\psi_1 v):L^2(\mathbb{R}^3)\|+C|v(x)| \\ & \le C\sum_{|\alpha|\le 2}\|\Gamma^\alpha v:L^2(\Omega)\|+C\sum_{|\alpha|\le 2}\|\partial_x^\alpha v:L^2(\Omega)\| \end{aligned}$$

となるので, (5.22) が得られる. よって,

$$\sum_{|\beta|\le 2N-3}|x||\partial^\beta\partial u(t,x)|\le C\sum_{|\beta|\le 2N-1}\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\|\le C\langle t\rangle^{1/2}e(T) \tag{5.23}$$

が成立つ. また, (3.11) により

$$|\partial u(t,x)|_N\le C\langle t+r\rangle^{-1}W(t,r)^{-1}e(T) \tag{5.24}$$

を得る. よって, (5.23), (5.24) により (5.21) が従う. 以上により (5.17) が示された.

さて, $\sum_{|\beta|\le 2N-8}\|\Gamma^\beta\partial u(t):L^2(\Omega)\|\le\log^{1/2}(2+t)\,e(T)$, (5.17) および (5.14) より, $|\alpha|\le 2N-8$ なる α に対して

$$\frac{d}{dt}E(\Gamma^\alpha u;t)\le C\langle t\rangle^{-1}\log(2+t)\,e(T)^3+C\langle t\rangle^{-1}(\varepsilon+D(T))^2$$

を得る. さらに,

$$\begin{aligned} E(\Gamma^\alpha u;t) &\le C\varepsilon^2+C\log^2(2+t)e(T)^3+C\log(2+t)\,(\varepsilon+D(T))^2 \\ &\le C\log(2+t)\,(\varepsilon^2+\log(2+t)\,e(T)^3+D(T)^2) \\ &\le C\log(2+t)\,(\varepsilon^2+D(T)^2) \end{aligned}$$

と評価でき, (5.16) が従う.

次に, 任意の $t\in[0,T)$ に対して

$$\sum_{|\alpha|\le 2N-15}\|\Gamma^\alpha\partial u(t):L^2(\Omega)\|\le C(\varepsilon+D(T)) \tag{5.25}$$

を導く. それには, $1/2<\nu<1$ なる ν に対して

$$\sum_{|\beta|\le 2N-14}\|\partial^\beta\partial u(t):L^2(\Omega_{3/4})\|\le C\langle t\rangle^{-\nu}(\varepsilon+D(T)) \tag{5.26}$$

を示せば十分である. 実際, この評価を認めれば, $\sum_{|\beta|\le 2N-15}\|\Gamma^\beta\partial u(t):L^2(\Omega)\|\le e(T)$ および (5.14) より, $|\alpha|\le 2N-15$ なる α に対して

$$\frac{d}{dt}E(\Gamma^\alpha u;t)\le C\langle t\rangle^{-1}e(T)^3+C\langle t\rangle^{-2\nu}(\varepsilon+D(T))^2$$

を得る．さらに，$2\nu > 1$ より

$$E(\Gamma^\alpha u;t) \le C\varepsilon^2 + C\log(2+t)\,e(T)^3 + C(\varepsilon + D(T))^2 \le C(\varepsilon^2 + D(T)^2)$$

と評価でき，(5.25) が従う．

最後に，(5.26) を示す．(5.19) により，

$$\sum_{|\alpha|\le 2N-13} \langle t\rangle^\nu \, \|\partial^\alpha L[F(\partial u)](t) : L^2(\Omega_{3/4})\| \le C(\varepsilon^2 + D(T))$$

を導けば十分である．(4.24) より，上式は

$$\|F(\partial u)(t) : N_{2N-10}(\nu, 1)\| \le Ce(T)^2 \tag{5.27}$$

から従うことが分かる．さて，(5.22) を使うと

$$\sum_{|\beta|\le 2N-10} |x||\partial^\beta \partial u(t,x)| \le C \sum_{|\beta|\le 2N-8} \|\Gamma^\alpha \partial u(t) : L^2(\Omega)\| \le C\log^{1/2}(2+t)\,e(T)$$

が成立つ．この評価と (5.24) を組み合わせると，$\nu < 1$ より (5.27) が従う．以上により (5.26) が示された．

第四段．各点評価

任意の $(t,x) \in [0,T) \times \Omega$ に対して

$$\langle x\rangle\langle t - |x|\rangle \, |\partial u(t,x)|_N \le C(\varepsilon + D(T)) \tag{5.28}$$

を示す．それには，(5.18) および (4.1) より，

$$\langle x\rangle\langle t - |x|\rangle \, |\partial L[F(\partial u)](t,x)|_N \le C(\varepsilon^2 + D(T))$$

を導けば十分である．(4.17) より，上式は

$$\|F(\partial u)(t) : N_{N+4}(1,1)\| \le Ce(T)^2 \tag{5.29}$$

から従うことが分かる．

まず，$N \ge 21$ のとき，$[(N+4)/2] \le N$, $N+6 \le 2N-15$ であることに注意する．よって，(5.24) より

$$|\partial u(t,x)|_{[(N+4)/2]} \le C\langle t + r\rangle^{-1}\, W(t,r)^{-1}\, e(T)$$

を得る．また，(5.22) より

$$|x||\partial u(t,x)|_{N+4} \le C \sum_{|\beta|\le N+6} \|\Gamma^\alpha \partial u(t) : L^2(\Omega)\| \le Ce(T)$$

が成立つ．これらの評価から (5.29) が従う．

第五段. 証明の完成

(5.13), (5.15), (5.16), (5.25) 及び (5.28) により，$N \geq 21$, $0 < \varepsilon \leq 1$ に対して (5.7) が成立する．今，正定数 M を $M \geq 3C_0$, $e(0) \leq M\varepsilon/2$ となるようにとる．仮に，$e(T) \leq M\varepsilon$ ならば，(5.7) より

$$e(T) \leq C_0\varepsilon + \left(C_0(M\varepsilon\log(2+T))^{1/2} + C_0M\varepsilon\log(2+T)\right)M\varepsilon \tag{5.30}$$

を得る．$C_0 \geq 1$ として一般性を失なわないので，そのように仮定する．このとき，与えられた ε に対して，T が

$$C_0^2M\varepsilon\log(2+T) \leq 1/9 \tag{5.31}$$

を満たす限り，(5.30) から

$$e(T) \leq \frac{M}{3}\varepsilon + (\frac{1}{3}+\frac{1}{9})M\varepsilon = \frac{7}{9}M\varepsilon < M\varepsilon$$

が成立つ．従って，混合問題 (5.1)–(5.3) の局所解は，(5.31) が成立つ限り延長可能である．以上により，Theorem 5.1 が示された． □

Remark. 障害物が星型領域の場合には，Theorem 5.1 の結果は [10] により示されている．また，[15] の手法を用いれば，局所エネルギー減衰評価を許す障害物に対しても同じ結果を導けると思われる．但し，上で与えられた証明では，スケーリングと呼ばれる作用素 $t\partial_t + x\cdot\nabla$ を用いる必要がなく，解の各点評価も $(1+t+|x|)^{-1}$ ではなく，$(1+|x|)^{-1}(1+|t-|x||)^{-1}$ のように改善される．

ここでは，(5.4) のように半線型の非線型項を考えたが，適当な修正を施せば，準線型の場合でも上の証明はそのまま通用する．また，非線型項がいわゆる null condition を満たせば，時間大域解が存在することも知られているが，上の証明の枠組みでこの事実を示すには，[15] に倣って，

$$S = t\partial_t + \psi_1(x)\,x\cdot\nabla$$

なるベクトル場をも考慮すればよい．

謝辞. この原稿をまとめるにあたり，和歌山大学の片山聡一郎氏には有益な意見交換を重ねて頂きました．この場をお借りして感謝の意を表したいと思います．また，研究代表者でもある東北大学の中村誠氏にもお世話になりました．どうも有難うございました．

参考文献

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null conditions and global existence of solutions to systems of wave equations with different propagation speeds*, in "Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics" (S. Kawashima and T. Yanagisawa ed.), Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., Vol. 48, 43–86, World Scientific, Singapore, 1998.

[2] F. Asakura, *Existence of a global solution to a semi-liear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 1459–1487.

[3] N. Hayashi, *Global existence of small solutions to quadratic nonlinear wave equations in an exterior domain*, J. Funct. Anal. **131** (1995), 302–344.

[4] A. Hoshiga and H. Kubo, *Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), 486–513.

[5] A. Hoshiga and H. Kubo, *Global solvability for systems of nonlinear wave equations with multiple speeds in two space dimensions*, Differential Integral Equations **17** (2004), 593–622.

[6] S. Katayama, *Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, Differential Integral Equations **17** (2004), 1043–1078.

[7] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, Chinese Ann. Math. Ser. B **25** (2004), 463–482.

[8] S. Katayama and K. Yokoyama, *Global small amplitude solutions to systems of nonlinear wave equations with multiple speeds*, Preprint.

[9] M. Keel, H. F. Smith and C. D. Sogge, *Global existence for a quasilinear wave equation outside of star-shaped domains*, J. Funct. Anal. **189** (2002), 155–226.

[10] M. Keel, H. F. Smith and C. D. Sogge, *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 109–153 (electronic).

[11] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321–332.

[12] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989), 73–83.

[13] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japanese J. Math. **27** (2001), 113–202.

[14] J. Metcalfe, *Global existence for semilinear wave equations exterior to nontrapping obstacles*, Houston J. Math. **30** (2004), 259–281.

[15] J. Metcalfe, M. Nakamura and C. D. Sogge, *Global existence of solutions to multiple speed systems of quasilinear wave equations in exterior domains*, Forum Math. **17** (2005), 133–168.

[16] J. Metcalfe and C. D. Sogge, *Hyperbolic trapped rays and global existence of quasilinear wave equations*, Invent. Math. **159** (2005), 75–117.

[17] Y. Shibata and Y. Tsutsumi, *On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain*, Math. Z **191** (1986), 165–199.

[18] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609–632.